دار المنظومة
DAR ALMANDUMAH
الرواد في قواعد المعلومات العربية

العنوان:	خوارزميات العنصر النهائي والمعادلات الإهليجية
المؤلف الرئيسي:	ابن سليم، زينب نوري سليم
مؤلفين آخرين:	هب الريح، أحمد عبدالعالي(مشرف)
التاريخ الميلادي:	2014
موقع:	مصراته
الصفحات:	1 - 157
رقم MD:	775111
نوع المحتوى:	رسائل جامعية
اللغة:	Arabic
الدرجة العلمية:	رسالة ماجستير
الجامعة:	جامعة مصراتة
الكلية:	كلية العلوم
الدولة:	ليبيا
قواعد المعلومات:	Dissertations
مواضيع:	المعادلات التفاضلية الجزئية، المعادلات الإهليجية، خوارزميات العنصر النهائي
رابط:	http://search.mandumah.com/Record/775111

© 2021 دار المنظومة. جميع الحقوق محفوظة.
هذه المادة متاحة بناء على الإتفاق الموقع مع أصحاب حقوق النشر، علما أن جميع حقوق النشر محفوظة. يمكنك تحميل أو طباعة هذه المادة للاستخدام الشخصي فقط، ويمنع النسخ أو التحويل أو النشر عبر أي وسيلة (مثل مواقع الانترنت أو البريد الالكتروني) دون تصريح خطي من أصحاب حقوق النشر أو دار المنظومة.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

كلية العلوم / جامعة مصراتة

مكتب الدراسات العليا والتدريب والمعيدين بالكلية

قســـــم (**الرياضيات**)

عنوان الرسالة :

خوارزميات العنصر النهائي والمعادلات الإهليجية
The Finite Element Methods and Elliptic Equations

قدمت هذه الرسالة استكمالاً لمتطلبات نيل درجة الإجازة العالية (الماجستير) في الرياضيات

مقدمة من الطالبة

زينب نوري سليم بن سليم

بكالوريس علوم

نوقشت هذه الرسالة يوم الثلاثاء الموافق :- 23 /12 / 2014م من قبل اللجنة المشكلة من

1) د. أحمد علي الواكشي	أستاذ مشارك	عضـــواً	....
2) أ.د. حسن خليفة الزغداني	أستاذ	عضـــواً	....
3) أ.د. أحمد عبد العالي هب الريح	أستاذ	مشرفاً ومقرراً	....

....

د. عادل محمد سلطان

مدير مكتب الدراسات العليا والتدريب
والمعيدين بالكلية

ليبيا حرة

جامعة مصراتة - كلية العلوم

قسم العلوم الرياضية – شعبة الرياضيات

خوارزميات العنصر النهائي والمعادلات الإهليجية

The finite element methods and elliptic equations

قدمت هذه الرسالة استكمالاً لمتطلبات نيل درجة الإجازة العالية (الماجستير)

في الرياضيات

دراسة مقدمة من الطالبة:

زينب نوري سليم بن سليم

بكالوريوس رياضيات / كلية العلوم / جامعة مصراتة

إشراف:

د. أحمد عبد العالي هب الريح

أستاذ بقسم الرياضيات / كلية العلوم / جامعة مصراتة

العام الجامعي 2014 – 2015 م

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ وَلَسَوْفَ يُعْطِيكَ رَبُّكَ فَتَرْضَىٰ ﴾

صدق الله العظيم

(سورة الضحى – الآية 5)

الإهداء

المجد للشهداء الأبرار

إلى سر وجودي في هده الحياة أبي وأمي

إلى أحبتي ومن أعانوني على المصاعب أشقائي وشقيقاتي

إلى جميع ابتسامات البراء المحيطة بي أطفالنا الاعزاء

إلى من رسمت اجسادهم بشظايا الحرب جرحانا الاشاوس

إلى زملائي وزميلاتي بالعمل وجميع الاحباء والاصدقاء

شكراً وتقديراً

دائماً الشكر أولاً للعاطي الوهاب ، ميسر الأمور وفاتح الأبواب ، نحمده ونشكره على جميع نعمه ، وما التوفيق إلا من عند الله .

كما أتقدم بجزيل شكري للأستاذ الفاضل

د. أحمد عبدالعالي هب الريح

لما زودني بوافر المعلومات والنصائح التي افادتني في انجاز هذا البحث .

الملخص

يتضمن هذا البحث (خوارزميات العنصر النهائي والمعادلات الاهليجية) توضيح مبسط لطريقة ريلي ورتز وطريقة اختيار النقاط وطريقة جاليركن كمدخل أساسي لطريقة العناصر النهائية والمعادلات الاهليجية ، وفي هذه الطرق الثلاث فرضنا الحل كمعادلة لمتعددة حدود من الدرجتين الثالثة و الرابعة لنفس المسألة ووجدنا أنه كلما زادت درجة المعادلة كلما كانت النتائج أفضل دقة .

طريقة اختيار النقاط سهلة التطبيق وطريقتا (ريلي ورتز) و جاليركن هما الافضل في الدقة ، وتطرقنا للخطوات المتبعة لحل المعادلة التفاضلية الجزئية الاهليجية بطريقة العناصر النهائية ، وطبقنا هذه الطريقة على مسائل لابلاس و بواسون و هليمهولتز على مناطق منتظمة وغير منتظمة ، حيث أن طريقة العناصر النهائية تعتبر هي الأفضل لحل مسائل على مناطق غير منتظمة .

قائمة المحتويات

المقدمة

طريقة العناصر النهائية (Finite element methods) تعتبر من الطرق العددية الهامة لإيجاد الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية الجزئية ، وفي هذا البحث ندرس هذه الطريقة للمعادلة التفاضلية الجزئية الاهليجية تحديداً ، وهدف هذا البحث هو ايجاد الحلول العددية للمعادلة التفاضلية الجزئية الاهليجية (لابلاس ، بواسون ، هليمهولتز) . يشتمل هذا البحث على ثلاثة فصول . الفصل الاول : يشتمل على مفاهيم أساسية كتعريف (المعادلة التفاضلية ، المشتقة الاتجاهية والمشتقات الجزئية و التدرج ...) وحل مسألة القيمة الحدية بثلاثة طرق– ريلي ورتز ، اختيار النقاط ، جاليركن – كمدخل أساسي لطريقة العناصر النهائية . الفصل الثاني : تطرقنا فيه إلى سرد الخطوات المتبعة لحل المعادلة التفاضلية الجزئية الاهليجية بطريقة العناصر النهائية بشكل مفصل مع بعض الامثلة البسيطة الموضحة لهذه الطريقة ، واشرنا في هذا الفصل إلى كيفية تقسيم نطاق المسألة إلى عناصر وإيجاد معادلات كل عنصر وتجميع هذه المعادلات للحصول على مصفوفة شاملة وكيفية تطبيق الشروط الحدية وأخيراً إيجاد الحل العددي للمسألة . الفصل الثالث / يشتمل على مسائل محلولة توضح طريقة العناصر النهائية ومسائل اخرى على مناطق منتظمة وغير منتظمة للمعادلات التفاضلية الجزئية الاهليجية (لابلاس وبواسون وهليمهولتز) وفي هذه المسائل استخدمنا برامج بلغة الفورتران وبرامج بالألة الحاسبة لإيجاد الحل العددي.

الفصل الاول

1.1 تعريفات

1.2 طريقة ريلي ورتز

1.3 طريقة اختيار النقاط

1.4 طريقة جاليركن

1.1 تعريفات

تعريف 1

المعادلة التفاضلية Differential Equation

هي علاقة بين المتغير التابع والمتغير أو المتغيرات المستقلة ، إذا كانت المعادلة تعتمد على متغير مستقل واحد، فإن المعادلة التفاضلية تسمى معادلة تفاضلية عادية، وإذا كانت المعادلة تعتمد على أكثر من متغير مستقل ، فإنها تسمى معادلة تفاضلية جزئية .

تعريف 2

المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية [1]

تكتب على الصورة التالية

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G$$

حيث العوامل A,B,C,D,E,F تكون دوال في المتغيرين y,x أو ثوابت

تصنيف المعادلة :

تصنيف المعادلات الجزئية من الرتبة الثانية بناءً على إشارة المميز

$$\Delta=B^2-4AC$$

أ) إذا كانت $\Delta=0$ فإن المعادلة تسمى معادلة مكافئة

ب) إذا كانت $\Delta>0$ فإن المعادلة تسمى معادلة زائدية

جـ) إذا كانت $\Delta<0$ فإن المعادلة تسمى معادلة ناقصة أو اهليجية

المعادلة التفاضلية الجزئية الاهليجية [4]

توجد ثلاثة انواع من هذه المعادلات وهي :

1) معادلة لابلاس (Laplace's Equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

2) معادلة بواسون (Poisson's Equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F(x,y)$$

3) معادلة هليمهولتز (Helmholtz's Equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+Q(x,y)\,u=F(x,y)$$

تعريف 3

المشتقات الجزئية Partial derivatives . (5)

إذا كانت f دالة في متغيرين x , y وإذا كانت x متغايرة فقط و y مثبتة وإذا كان للدالة f مشتقة فإنها تسمى مشتقة جزئية لـ f بالنسبة للمتغير x .

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ معرفة في المنطقة $\Omega \subseteq R^2$ الواقعة في المستوى XY عند النقطة (x,y) في المنطقة Ω وبشرط وجود النهاية فإن المشتقتين الجزئيتين $f_x(x,y)$ ، $f_y(x,y)$ يعرفان كما يلي :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\ .$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\ .$$

إذا كان لدالة ما ولتكن f في عدة متغيرات مشتقات جزئية أولى ، فإن هذه المشتقات والتي تعتبر دوال في عدة متغيرات أيضاً يمكن أن يكون لها مشتقات جزئية أولى . وهذه المشتقات تسمى مشتقات جزئية من الرتبة الثانية للدالة الأصلية ، أو المشتقات الثانية وتعرف كما يأتي :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_x(x+\Delta x, y) - f_x(x, y)}{\Delta x} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(x, y+\Delta y) - f_x(x, y)}{\Delta y} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(x+\Delta x, y) - f_y(x, y)}{\Delta x} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_y(x, y+\Delta y) - f_y(x, y)}{\Delta y}$$

تعريف 4

متعددة حدود لاجرانج (3)

نفرض أن $f(x)$ ترمز إلى متعددة حدود من الدرجة n ، وتأخذ القيم $f(x_0)\, ,\, f(x_1)\, ,\, f(x_2)\, ,\, \cdots\, ,\, f(x_n)$ على النقاط $x_0\, ,\, x_1\, ,\, x_2\, ,\, \cdots\, ,\, x_n$ على التوالي .

وبالتالي فإن

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} f(x_0)$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} f(x_1)$$

$$+ \cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})} f(x_n)$$

هي متعددة حدود لاجرانج ويمكن كتابتها كما يلي :

$$L_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \quad \text{و} \quad L_n'(x) = \frac{d}{dx} L_n(x)$$

تعريف 5

التدرج Gradient [5]

إذا كانت الدالة f في ثلاثة متغيرات قابلة للاشتقاق ، فإن تدرج الدالة f يعتبر في الحقيقة مجالاً متجهاً ويرمز له بالرمز $grad\ f$ أو ∇f ويعرف كما يأتي :

$$grad\ f(x,y,z) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k \ .$$

تعريف 6

المشتقة الاتجاهية Directional derivative [5]

إذا كانت الدالة f في متغيرين فإن المشتقة المتجهة للدالة f تعرف كما يأتي :

$$D_u f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+\mu_1 h, y+\mu_2 h) - f(x,y)}{h}$$

ويشترط وجود النهاية .

المشتقة الاتجاهية يمكن أن تكتب على الصورة التالية :

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y).\vec{u}$$

حيث أن $\vec{u}$ متجه الوحدة و ∇f تدرج الدال f .

ويمكن إيجاد المشتقة بتطبيق النظرية التالية :

نظرية (1) [5]

إذا كانت الدالة f ومشتقتاها الجزئيتان متصلتان ، فإن :

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\mu_1 + f_y(x,y)\mu_2$$

حيث أن $\vec{u}$ متجه الوحدة .

$$\vec{u} = \mu_1 i + \mu_2 j$$

تعريف 7

مسألة القيمة الحدية boundary value problem [4]

المعادلة :

$$y'' = f(x,y,y') \quad , \quad a \le x \le b$$

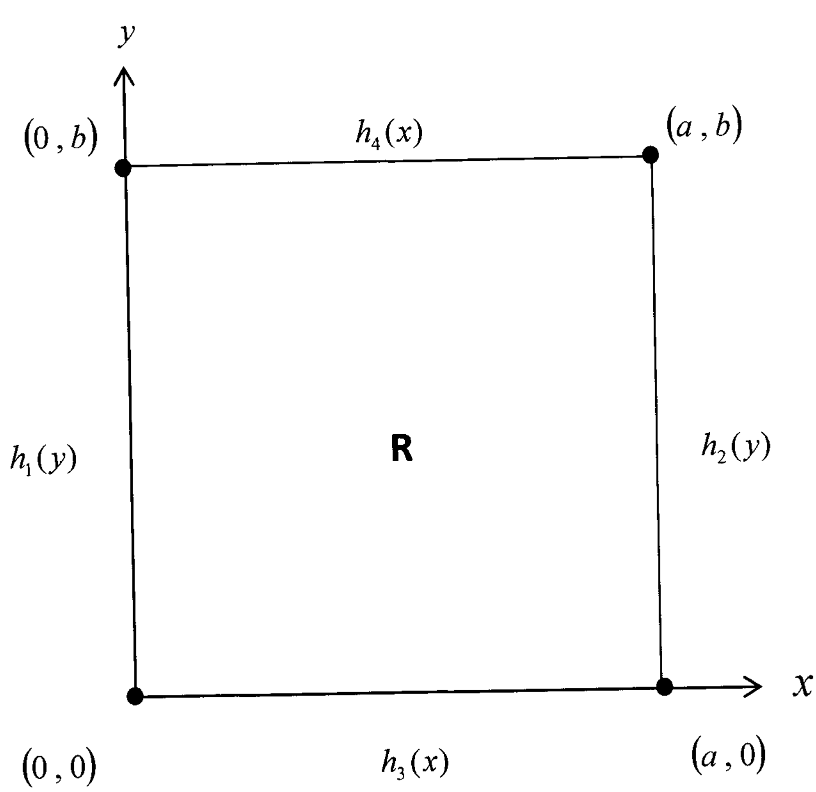
مع الشرطين الحديين : $y(b) = \beta \, , \, y(a) = \alpha$

تسمى مسألة قيمة حدية (boundary value problem) حيث a , b , α , β كلها ثوابت

و مسألة القيمة الحدية الجزئية (المصاحبة للمعادلات الإهليجية) هي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Q(x, y)u = F(x, y)$$
$$u(0, y) = h_1(y) \quad ; \quad 0 \le y \le b$$
$$u(a, y) = h_2(y) \quad ; \quad 0 \le y \le b$$
$$u(x,0) = h_3(x) \quad ; \quad 0 \le x \le a$$
$$u(x,b) = h_4(x) \quad ; \quad 0 \le x \le a$$

المعرفة على المنطقة R الموضحة بالشكل التالي:



وبصورة عامة سوف نطبق هذه الطريقة على المعادلة الإهليجية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+Q(x,y)u=F(x,y)$$

المعرفة على المنطقة R المحدودة بالمنحنى L مع الشروط الحدية

$$u=u_0 \quad on \quad L_1$$
$$u_n=\alpha u+\beta \quad on \quad L_2$$

حيث u_n تكون المشتقة العمودية إلى الخارج و α , β ثابتان

لا حظ أنه في هذه المسألة تكون لدينا شروط ديرشليه على أجزاء من الحدود L_1 و شروط مختلطة على الأجزاء الأخرى L_2 .

إذا أعطيت قيمة للدالة u على الحدود فالشروط تسمى شروط ديرشليه .

وإذا أعطيت المشتقة الاتجاهية $\frac{\partial u}{\partial n}$ في الاتجاه العمودي على الحدود فالشروط تسمى شروط نيومان .

وإذا أعطي تركيب خطي لشرطي ديرشليه و نيومان (مختلطة) $L\frac{\partial u}{\partial n}+hu$ فالشروط تسمى شروط روبن .

1.2 طريقة ريلي ورتز (The Rayleigh – Ritz Method) [4]

هذه الطريقة تعتمد على حسبان التغاير (calculus of variations) بهذه الطريقة تحل مسألة القيمة الحدية بتقريب الحل بتركيب خطي نهائي من دوال أساسية بسيطة تحقق شروط معينة .

الآن نعتبر مسألة قيمة حدية خطية من الرتبة الثانية على الفترة $[a,b]$:

$$y'' + Q(x)y = F(x) \quad ; \quad y(a) = \alpha \quad , \quad y(b) = \beta \qquad (1)$$

الدالية المناظرة للمعادلة (1) هي :

$$I[u] = \int_a^b [(\frac{du}{dx})^2 - Qu^2 + 2Fu]dx \qquad (2)$$

إذا اشتمل الشرطان الحديان على المشتقة y فإنه يجب تعديل الدالية .

يمكن تحويل المعادلة (2) إلى المعادلة (1) بمعادلة لاجرانج هكذا إيجاد القيمة القصوى للمعادلة (2) يعطي حل المعادلة (1) . لاحظ أن الدالية تشتمل على مشتقة من الرتبة الأولى بدلا من المشتقة الثانية في المعادلة الأصلية . هذا لا يبسط العمليات الرياضية فقط ولكن يسمح بإيجاد الحلول حتى عند وجود عدم اتصالات (discontinuities) .

إذا كان حل المعادلة التفاضلية معروفا فإنه بالتعويض عنه في المعادلة (2) يجعل $I[u]$ قيمة صغرى . إذا كان الحل غير معروف فإنه يمكن تقريبه بدالة اختيارية والنظر في إمكانية جعل الدالية قيمة صغرى باختيار ملائم لوسيطات التقريب .

طريقة ريلي ورتز تعتمد على الفكرة التالية :

نفرض أن $u(x)$ تقريب للحل الفعلي $y(x)$ على الصورة التالية :

$$u(x) = c_0 v_0(x) + c_1 v_1(x) + \cdots + c_n v_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i v_i(x) \qquad (3)$$

عادة $c_0 = 1$

يوجد شرطان على v في المعادلة (3) :

أ) يجب اختيار v_i بحيث $u(x)$ تحقق الشرطين الحديين

ب) الدوال الأساسية v_i حيث $i=0,1,2,\ldots,n$ يجب أن تكون مستقلة خطيا

الدوال v_i حيث $i=0,1,2,\ldots,n$ تسمى دوال تجريبية (trial functions)

وتختار العوامل c_i و v_i لجعل $u(x)$ تقريب جيد للحل الفعلي للمعادلة (1) .

إذا كان لدينا بعض المعلومات المسبقة عن الدالة الفعلية $y(x)$ فإنه يمكن اختيار v_i بصورة أفضل لتمثيل $y(x)$ عادة لا توجد معلومات والاختيار المعتاد هو استخدام متعددات حدود . يجب إيجاد طريقة لتحديد قيم c_i لجعل $u(x)$ قريبة جدا من $y(x)$. تستخدم الدالية في (2) للقيام بهذه المهمة .

إذا عوضنا عن $u(x)$ كما في المعادلة (3) في (2) نحصل على :

$$I(c_1,c_2,\cdots,c_n)=\int_a^b [(\frac{d}{dx}\sum_{i=0}^{n} c_i v_i(x))^2 - Q(\sum_{i=0}^{n} c_i v_i(x))^2 + 2Fc_i v_i]dx \qquad (4)$$

لاحظ أن I دالة عادية في العوامل c_i حيث $i=0,1,2,\ldots,n$ ، لإيجاد القيمة الصغرى للدالية $I[c_i]$ نأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة لكل وسيط c_i ونجعلها تساوي الصفر وتكون النتيجة فئة من المعادلات في c_i التي يمكن حلها .

إذا أخذنا المشتقات الجزئية بالنسبة لـ c_i وهي احدى الوسيطات نحصل على :

$$\frac{\partial I}{\partial c_i}=\int_a^b 2(\frac{du}{dx})\frac{\partial}{\partial c_i}(\frac{du}{dx})dx-\int_a^b 2Qu\frac{\partial u}{\partial c_i}dx+\int_a^b 2F\frac{\partial u}{\partial c_i}dx=0 \qquad (5)$$

الدالة الأساسية $v_0(x)$ خطية وتحقق الشرطين الحديين ويمكن إيجادها كما يلي :

$$v_0(x)=c+dx$$

وبتطبيق الشرطين الحديين نجد أن :

$$v_0(x) = \alpha - \frac{\alpha-\beta}{a-b}a + \frac{\alpha-\beta}{a-b}x \qquad (6)$$

الحل التقريبي لمسألة القيمة الحدية يأخذ احدى الصيغتين التاليتين :

$$\begin{aligned} u(x) \cong\ & v_0(x) + c_1(x-a)(x-b) + c_2(x-a)^2(x-b) + \\ & c_3(x-a)^3(x-b) + \ldots + c_n(x-a)^n(x-b) \end{aligned} \qquad (7)$$

أو

$$\begin{aligned} u(x) \cong\ & v_0(x) + c_1(x-a)(x-b) + c_2(x-a)(x-b)^2 + \\ & c_3(x-a)(x-b)^3 + \ldots + c_n(x-a)(x-b)^n \end{aligned} \qquad (8)$$

حيث $v_0(x)$ معرفة بالمعادلة (6)

من (3) بالتعويض في المعادلة (5) نحصل على

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial c_i} =\ & \int_a^b 2(v_0'(x) + c_1 v_1'(x) + \cdots + c_i v_i'(x) + \cdots + c_n v_n'(x))(v_i'(x))dx \\ & - \int_a^b 2Q(x)(v_0(x) + c_1 v_1(x) + \cdots + c_i v_i(x) + \cdots + c_n v_n(x))(v_i(x))dx \\ & + \int_a^b 2F(x)(v_i(x))dx = 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

لتوضيح هذه الطريقة نعتبر المثال التالي :

مثال 1 (10)

أوجد حل مسألة القيمة الحدية

$$y'' - 4y = -x \quad ; \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 2$$

الحل الفعلي لهذه المسألة يكون :

$$y=\frac{7}{4}\left(\frac{e^2}{e^4-1}\right)\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)+\frac{x}{4}$$

الحل :

نفرض أن
$$u(x)=v_0(x)+c_1v_1(x)+c_2v_2(x)$$

حيث $v_0(x)$ تحقق الشرطين الحديين وبالتعويض في العلاقة (6) نحصل على :

$$v_0(x)=0-\frac{0-2}{0-1}(0)+\frac{0-2}{0-1}x=0-0+2x=2x$$

لاحظ أن $v_0(0)=0$ ، $v_0(1)=2(1)=2$

من (7) حل هذه المسألة يكون :

$$u(x)=2x+c_1x(x-1)+c_2x^2(x-1)$$

هذا الحل التقريبي يحقق الشرطين الحديين للمسألة .

واضح أن

$$v_0(x)=2x \quad , \quad v_1(x)=x(x-1)=x^2-x$$
$$v_2(x)=x^2(x-1)=x^3-x^2$$

تفاضل هذه الدوال يعطي :

$$v_0'(x)=2 \quad , \quad v_1'(x)=2x-1 \quad , \quad v_2'(x)=3x^2-2x$$

وبالتعويض عن $v_i(x)$ ومشتقاتها في (9) نحصل على :

$$\frac{\partial I}{\partial c_1}=\int_0^1(2+(2x-1)c_1+(3x^2-2x)c_2)(2x-1)dx$$

$$-\int_0^1(-4)(2x+(x^2-x)c_1+(x^3-x^2)c_2)(x^2-x)dx$$

$$+\int_0^1(-x)(x^2-x)dx=0$$

$$=\int_0^1[4x-2+(4x^2-4x+1)c_1+(6x^3-7x^2+2x)c_2$$

$$+8x^3-8x^2+(4x^4-8x^3+4x^2)c_1$$

$$+(4x^5-8x^4+4x^3)c_2-x^3+x^2]dx$$

$$=\int_0^1[(4x^4-8x^3+8x^2-4x+1)c_1$$

$$+(4x^5-8x^4+10x^3-7x^2+2x)c_2$$

$$+7x^3-7x^2+4x-2]dx$$

وبعد إجراء العمليات التكاملية:

$$\frac{7}{15}c_1+\frac{7}{30}c_2=\frac{7}{12}$$ أو

$$4c_1 + 2c_2 = 5 \qquad (1)$$

وبالمثل

$$\frac{\partial I}{\partial c_2} = \int_0^1 (2 + (2x-1)c_1 + (3x^2 - 2x)c_2)(3x^2 - 2x)dx$$

$$- \int_0^1 (-4)(2x + (x^2 - x)c_1 + (x^3 - x^2)c_2)(x^3 - x^2)dx$$

$$+ \int_0^1 (-x)(x^3 - x^2)dx = 0$$

$$= \int_0^1 6x^2 - 4x + (6x^3 - 7x^2 + 2x)c_1 + (9x^4 - 12x^3 + 4x^2)c_2$$

$$+ 8x^4 - 8x^3 + (4x^5 - 8x^4 + 4x^3)c_1 + (4x^6 - 8x^5 + 4x^4)c_2$$

$$- x^4 + x^3]dx$$

$$= \int_0^1 [(4x^5 - 8x^4 + 10x^3 - 7x^2 + 2x)c_1$$

$$+ (4x^6 - 8x^5 + 13x^4 - 12x^3 + 4x^2)c_2$$

$$+ 7x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 4x]dx$$

وبعد إجراء العمليات التكاملية:

$$\frac{7}{30}c_1 + \frac{6}{35}c_2 = \frac{7}{20}$$ أو

$$98c_1 + 72c_2 = 147 \qquad (2)$$

من المعادلتين (1) ، (2) نحصل على المنظومة التالية :

$$4c_1 + 2c_2 = 5$$
$$98c_1 + 72c_2 = 147$$

وبعد حل هذه المنظومة نحصل على :

$$c_1 = 0.717391304$$
$$c_2 = 1.065217391$$

حل المسألة المطلوبة يكون :

$$u(x) = 2x + 0.717391304\, x(x-1) + 1.065217391\, x^2(x-1)$$

$$u(x) = 2x + 0.717391304\, (x^2 - x) + 1.065217391\, (x^3 - x^2)$$

الجدول التالي يعطي المقارنة بين الحلين العددي والفعلي :

x	الحل العددي	الحل الفعلي
0	0	0
0.1	0.125847826	0.122146833
0.2	0.251130434	0.24819251
0.3	0.38223913	0.382192349
0.4	0.525565217	0.528520895

0.5	0.6875	0.692047489
0.6	0.874434782	0.87833169
0.7	1.09276087	1.0938464
0.8	1.348869565	1.346237641
0.9	1.649152174	1.644631424
1	2	2

للحصول على دقة افضل يمكن فرض الحل على الصورة التالية :

$$u(x) = v_0(x) + c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) + c_3 v_3(x)$$

من (7) حل هذه المسألة يكون :

$$u(x) = 2x + c_1 x(x-1) + c_2 x^2(x-1) + c_3 x^3(x-1)$$

هذا الحل التقريبي يجب أن يحقق الشرطين الحديين للمسألة .

واضح أن

$$v_0(x) = 2x \quad , \quad v_1(x) = x(x-1) = x^2 - x$$
$$v_2(x) = x^2(x-1) = x^3 - x^2 \ , v_3(x) = x^3(x-1) = x^4 - x^3$$

تفاضل هذه الدوال يعطي :

$$v_0'(x) = 2 \quad , \quad v_1'(x) = 2x - 1$$
$$v_2'(x) = 3x^2 - 2x \quad , \quad v_3'(x) = 4x^3 - 3x^2$$

وبالتعويض عن $v_i(x)$ ومشتقاتها في (9) نحصل على :